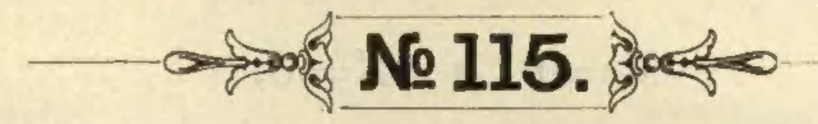
ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



№ 115.

X Сем. 15 Марта 1891 г. № 7.

О РАЗЛОЖЕНІИ МНОГОЧЛЕНОВЪ НА МНОЖИТЕЛЕЙ.

(*Окончаніе*)*).

Разысканіе раціональныхъ множителей какой угодно степени.

Раціональные дѣлители M_x имѣютъ видъ:

$$y=x^p+a_1x^{p-1}+a_2x^{p-2}+\ldots\ldots+a_p,$$

гдѣ a_1, a_2, a_3 и пр. суть цѣлыя числа.

При отысканіи этихъ дѣлителей достаточно приписывать p значенія отъ 2 до $\frac{n}{2}$, если n четное, и отъ 2 до $\frac{n-1}{2}$, если n нечетное: дѣлители высшихъ степеней найдутся какъ частныя отъ дѣленія M_x на найденныхъ ранѣе множителей.

Для отысканія соизмѣримыхъ множителей существуетъ нѣсколько способовъ.

Способъ неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

При этомъ способѣ за неизвѣстныя принимаютъ коэффиціенты обоихъ множителей и, послѣ перемноженія послѣднихъ, сравниваютъ коэффиціенты при одинаковыхъ стѣпеняхъ x въ полученномъ произведеніи и въ данномъ многочленѣ. Такимъ образомъ получаютъ систему n уравненій съ n неизвѣстными, цѣлыя рѣшенія которой будутъ служить коэффиціентами искомыхъ множителей.

Для рѣшенія системы придется прибѣгнуть къ исключенію и, въ концѣ концовъ, вопросъ приведется къ отысканію цѣлыхъ рѣшеній одного уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ, что намъ знакомо.

---

*) См. „Вѣстникъ“ № 114.

Исключеніе, какъ извѣстно, достигается всегда путемъ конечнаго ряда дѣйствій *), а поэтому то же относится и къ разложенію многочлена на множителей.

---

*) Приводимъ *способъ исключенія*, принадлежащій *Клеро*.

Разсмотримъ сначала два уравненія съ двумя неизвѣстными x и y:

$$M=0 \quad \text{и} \quad N=0.$$

M и N предполагаются взаимно простыми (общіе множители исключаются при посредствѣ общаго наибольшаго дѣлителя). Расположивъ члены многочленовъ M и N по степенямъ какой нибудь перемѣнной, напримѣръ y, будемъ производить надъ этими многочленами тотъ рядъ дѣйствій, который совершается при отысканіи ихъ общаго наибольшаго дѣлителя; для избѣжанія дробныхъ коэффиціентовъ будемъ вводить въ дѣлимыя множителей, вообще говоря, зависящихъ отъ буквы x. Рядъ дѣйствій долженъ быть продолженъ до полученія остатка, не зависящаго отъ y.

Операція приведетъ къ ряду равенствъ:

$$K_1M=q_1N+R_1$$
$$K_2N=q_2R_1+R_2$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$K_lR_{l-2}=q_lR_{l-1}+R_l,$$

гдѣ K_1, K_2.....—вводимые множители, q_1, q_2.....—частныя, R_1, R_2. ...— остатки.

Изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ, что всѣ рѣшенія системы:

$$M=0, \quad N=0$$

находятся въ числѣ рѣшеній системы:

$$R_{l-1}=0 \quad R_l=0,$$

а, такъ какъ въ послѣднее уравненіе y не входитъ, значитъ исключеніе исполнено.

Въ случаѣ трехъ уравненій:

$$M=0, \quad N=0, \quad P=0$$

съ тремя неизвѣстными x, y, z, исключаемъ, по предыдущему способу, z изъ системъ:

$$\left.\begin{matrix}M=0\\N=0\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}N=0\\P=0\end{matrix}\right\},$$

тогда придемъ къ системѣ двухъ уравненій съ двумя неизвѣст. и т. д.

Полезно, можетъ быть, замѣтить, что, вообще говоря, не всѣ рѣшенія системы

$$\begin{matrix}R_{l-1}=0\\R_l=0\end{matrix}$$

удовлетворяютъ данной системѣ.

Г.г. *Labatie* и *Sarrus* указали методъ *различенія* рѣшеній. За подробностями по этому поводу отсылаемъ къ „Начальной теоріи уравненій“ *Тотгентера*.

Слѣдуетъ однако замѣтить, что рѣшеніе системы уравненій, опредѣляющихъ коэффиціенты, можетъ быть ведено методомъ, не требующимъ исключенія. Поясним это на частномъ примѣрѣ.

Пусть:

$$M_x=x^5+A_1x^4+A_2x^3+A_3x^2+A_2x+A_5=(x^2+\alpha_1x+\alpha_2)(x_3+\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3).$$

Тогда, для опредѣленія α_1, α_2, β_1 и пр., получимъ слѣдующую систему:

$$\alpha_1+\beta_1=A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\alpha_2+\alpha_1\beta_1+\beta_2=A_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2+\beta_3=A_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\alpha_2\beta_2+\alpha_1\beta_3=A_4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\alpha_2\beta_3=A_5. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Для рѣшенія ея можемъ поступить такъ.

Разложивъ A_5 на множителей, найдемъ нѣсколько системъ возможныхъ значеній для α_2 и β_3.

Взявъ одну изъ нихъ, подставляемъ въ (4) и рѣшаемъ въ цѣлыхъ числахъ полученное неопредѣленное уравненіе. Число различныхъ значеній α_1 и β_2—ограниченно. Дѣйствительно, если обозначимъ черезъ l и k соотвѣтственно высшій предѣлъ положительныхъ и отрицательныхъ корней уравненія $M_x=0$, то

$$2k<\alpha<2l.$$

Это потому, что α выражаетъ собою взятую съ обратнымъ знакомъ сумму двухъ корней вышеприведеннаго уравненія. Найдя α_1, отыщемъ β_1 изъ уравненія (1).

Если найденныя такимъ образомъ значенія α_1, α_2, β_1, β_2 и β_3 удовлетворяютъ уравненіямъ (2) и (3), то одно изъ разложеній найдено; въ противномъ случаѣ нужно испытать другіе корни уравненій (4) и (5).

Способъ, основанный на дѣленіи.

Если M_x дѣлится на:

$$y=x^p+\alpha_1x^{p-1}+\alpha_2x^{p-2}+\ldots\ldots\ldots+\alpha_p, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

то остатокъ этого дѣленія долженъ быть равенъ нулю при всякомъ значеніи x. Для этого необходимо, чтобы всѣ коэффиціенты остатка равнялись нулю. Такъ какъ степень остатка равна $p-1$, то коэффиціентовъ въ немъ будетъ p; приравнивая ихъ нулю, получимъ p уравненій съ p неизвѣстными. Путемъ исключенія придемъ къ одному уравненію съ

однимъ неизвѣстнымъ *) и тогда останется найти цѣлые корни этого уравненія, что намъ извѣстно.

Другой варіантъ того же способа.

Изъ (1):

$$x^p = y - a_1x^{p-1} - a_2x^{p-2} - \ldots\ldots - a_p. \qquad (2)$$

Умножимъ обѣ части (2) на x и во 2-ой части полученнаго равенства замѣнимъ x^p по формулѣ (2); тогда получимъ выраженіе для x^{p+1}, зависящее только отъ:

$$y,\ x,\ x^2, \ldots\ldots x^{p-1}.$$

Поступая такимъ образомъ далѣе, найдемъ выраженія для x^{p+2}, x^{p+3} и т. д. въ зависимости отъ тѣхъ же количествъ x, $x^2 \ldots$, x^{p-1} и y.

Если въ M_x замѣнимъ x^p, $x^{p+1}, \ldots$ найденными для нихъ выраженіями, то получимъ:

$$M_x = U_1x^{p-1} + U_2x^{p-2} + \ldots\ldots + U_p,$$

гдѣ всѣ U суть цѣлые относительно y многочлены. Подставимъ въ M_x вмѣсто x одинъ изъ p корней уравненія:

$$y = x^p + a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2} + \ldots\ldots + a_p = 0,$$

напримѣръ λ_1.

Такъ какъ y есть множитель M_x, то, при:

$$x = \lambda_1,$$

M_x обратится въ нуль; U_1, U_2, $U_3 \ldots$ обратятся соотвѣтственно въ u_1, u_2, $u_3, \ldots$ гдѣ уже нѣтъ y, и окончательно получимъ:

$$u_1\lambda_1^{p-1} + u_2\lambda_2^{p-2} + \ldots\ldots + u_p = 0.$$

Изъ этого тождества заключаемъ, что уравненіе $(p-1)$-ой степени

$$u_1X^{p-1} + u_2X^{p-2} + \ldots\ldots + u_p = 0$$

имѣетъ p корней λ_1, $\lambda_2, \ldots\ldots \lambda_p$.

---

*) Легко понять, что степень этого уравненія равна $C^n{}_p$, гдѣ:

$$C^n{}_p = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots\ldots p}.$$

Слѣдовательно

$$u_1=0,\quad u_2=0,\quad u_3=0\ldots\ldots u_p=0.$$

Такимъ образомъ получаемъ p уравненій для опредѣленія p неизвѣстныхъ коэффиціентовъ *).

Примѣръ.

Разложить на множители:

$$M_x=x^5-x-15,$$

Легко убѣдиться, что M_x не имѣетъ линейныхъ дѣлителей. Для отысканія квадратичныхъ дѣлителей вида x^2+px+q поступаемъ по предыдущему способу и находимъ слѣдующія уравненія для опредѣленія p и q:

$$p^4-3p^2q+q^2=1$$

$$p^3q-2q^2p=15.$$

Послѣднее изъ нихъ можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$pq(p^2-2q)=15,$$

изъ котораго очевидно, что p и q суть дѣлители числа 15.

Путемъ испытаній находимъ:

$$q=3$$
$$p=-1.$$

Слѣдовательно:

$$x^2+px+q=x^2-x+3$$

и

$$M_x=x^5-x-15=(x^2-x+3)(x^3+x^2-2x-5).$$

Способъ Кронекера.

Если бы были извѣстны p значеній $u_1,\ u_2,\ldots\ldots u_p$ дѣлителя соотвѣтствующихъ p частнымъ значеніямъ x: $a_1,\ a_2\ldots\ldots a_p$, то коэффиціенты его легко было бы найти изъ системы p линейныхъ уравненій:

---

*) Разсужденія этого и предыдущаго параграфа основаны на слѣдующей истинѣ: если уравненіе n-ой степени имѣетъ болѣе n корней, то всѣ его коэффиціенты суть нули.

См. Алгебру Бертрана въ переводѣ Билибина, стр. 432.

$$\left.\begin{array}{l} a_1{}^p + \alpha_1 a_1{}^{p-1} + \ldots\ldots + \alpha_p = u_1 \\ a_2{}^p + \alpha_1 a_2{}^{p-1} + \ldots\ldots + \alpha_p = u_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_p{}^p + \alpha_1 a_p{}^{p-1} + \ldots\ldots + \alpha_p = u_p. \end{array}\right\} (N)$$

Слѣдовательно, вопросъ сводится къ отысканію u_1, u_2......u_p. Замѣтимъ, что u_1, u_2, u_3...... суть цѣлыя числа и соотвѣтственные дѣлители чиселъ M_{a_1}, M_{a_2}, M_{a_3}...... Такъ какъ всѣ дѣлители этихъ послѣднихъ чиселъ извѣстны, то, взявъ какой нибудь дѣлитель M_{a_1}, можемъ принять его за u_1, взявъ какой нибудь дѣлитель M_{a_2}, примемъ его за u_2 и т. д.

Рѣшивъ затѣмъ систему (N), найдемъ коэффиціенты многочлена:

$$y = x^p + \alpha_1 x^{p-1} + \ldots\ldots + \alpha_p,$$

и непосредственнымъ дѣленіемъ узнаемъ, дѣлится ли M_x на y.

Затѣмъ возьмемъ другую комбинацію дѣлителей, снова найдемъ систему коэффиціентовъ и найденный многочленъ опять испытаемъ непосредственнымъ дѣленіемъ и т. д.

Такъ какъ число различныхъ комбинацій дѣлителей конечно, то, посредствомъ конечнаго ряда дѣйствій, можемъ найти всѣхъ дѣлителей M_x.

Ради упрощенія, вмѣсто рѣшенія системы (N) можно составить формулу, сразу опредѣляющую многочленъ M_x k-ой степени, если извѣстны $k+1$ его частныхъ значеній при $x=x_0$, x_1......x_k.

Съ этою цѣлью примемъ слѣдующія обозначенія:

$$S_x = (x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_k)$$

$$S_x^{(i)} = \frac{S_x}{x-x_i}.$$

Тогда

$$M_x = \frac{S_x^{(0)}}{S_{x_0}{}^{(0)}} M_{x0} + \frac{S_x^{(1)}}{S_{x_1}{}^{(1)}} M_{x_1} + \ldots\ldots + \frac{S_x^{(k)}}{S_{xk}{}^{(k)}} M_{xk}.$$

Дѣйствительно: обѣ части этого равенства представляютъ собою цѣлые многочлены степени k, принимающіе равныя значенія при слѣдующихъ $k+1$ значеніяхъ x^a: x_0, x_1....x_k, а извѣстно*), что многочлены, обладающіе такими свойствами, равны при всѣхъ значеніяхъ перемѣннаго. Формула эта принадлежитъ *Лагранжу*.

Для примѣненія ея къ данному случаю надо положить

$$k = p - 1,$$

*) См. Алгебру Бертрана, стр. 439.

такъ какъ:

$$\alpha_1 a_1^{p-1} + \alpha_2 a^{p-2} + \ldots\ldots + \alpha_p = u_1 - a^p,$$

гдѣ 2-ая часть считается извѣстною.

Способъ Кронекера для разложенія на соизмѣримыхъ множителей многочлена съ какимъ угодно числомъ перемѣнныхъ.

Пусть требуется разложить на множителей:

$$M_{x\ y,z \ldots\ldots} = \sum A x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta, \ldots\ldots\ldots$$

гдѣ α, β, γ..... цѣлыя положительныя числа.

Припишемъ буквамъ y, z..... нѣкоторыя частныя значенія; именно положимъ, что:

$$y = x^g$$

$$z = x^{g^2}$$

$$t = x^{g^3}$$

гдѣ g любое цѣлое положительное число, превышающее наибольшее изъ значеній α, β, γ и т. д.

Послѣ замѣны перемѣнныхъ x, y, z...... ихъ частными значеніями $M_{x,y,z}$ обратится въ нѣкоторый многочленъ M_x объ одной перемѣнной, разложенія котораго мы найти умѣемъ.

Между разложеніями на множителей многочленовъ $M_{x,y,z\ldots}$ и M_x существуетъ опредѣленная зависимость.

1. Всякому разложенію $M_{x,y,z}$ совтвѣтствуетъ нѣкоторое разложеніе M_x.

Дѣйствительно, если въ равенствѣ:

$$M_{x,y,z\ldots\ldots} = \sum A x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta = \sum B x^{\alpha'} y^{\beta'} z^{\gamma'} t^{\delta'} \ldots\ldots \sum C x^{\alpha''} y^{\beta''} z^{\gamma''} t^{\delta''} \quad (1)$$

замѣнимъ x, y, z.... ихъ частными значеніями, то получимъ разложеніе для M_x, именно:

$$M_x = \sum A x^r = \sum B x^q \sum C x^s \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Здѣсь:

$$\left.\begin{aligned} r &= \alpha + \beta g + \gamma g^2 + \delta g^2 + \ldots\ldots\ldots \\ q &= \alpha' + \beta' g + \gamma' g^2 + \delta' g^3 + \ldots\ldots\ldots \\ s &= \alpha'' + \beta'' g + \gamma'' g^2 + \delta'' g^3 + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (3)$$

и притомъ:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha'+\alpha''<g^{*)} \\ \beta'+\beta''<g \\ \gamma'+\gamma''<g \\ \text{и т. д.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

2. Кромѣ разложенiй вида (2), доставляемыхъ многочленомъ $M_{x,y,z,\ldots\ldots}$, M_x можетъ имѣть и другiя разложенiя, обусловливаемыя частнымъ видомъ его.

Какъ отличить тѣ разложенiя, которыя происходятъ изъ $M_{x,y,z}$, отъ всѣхъ остальныхъ?

Для того, чтобы разложенiе (2) соотвѣтствовало разложенiю (1)-му необходимы условiя (4); эти же условiя и достаточны. Покажемъ это.

Пусть дано разложенiе (2).

Выразимъ r, q и s (во всѣхъ членахъ) по системѣ нумерацiи g. Тогда получимъ равенства (3), въ которыхъ α, β, γ, α', β' и т. д. имѣютъ единственныя и совершенно опредѣленныя значенiя,—это слѣдуетъ изъ представляемости чиселъ по данному основанiю нумерацiи.

Пусть намъ дано:

$$\alpha'+\alpha''<g,$$

$$\beta'+\beta''<g,$$

$$\gamma'+\gamma''<g.$$

Изъ этихъ условiй и равенства:

$$r=q+s$$

или

$$\alpha+\beta g+\gamma g^2+\delta g^3+\ldots\ldots=\alpha'+\beta' g+\gamma' g^2+\delta' g^3+\ldots+\alpha''+\beta'' g+\gamma'' g^2+\delta'' g^3+\ldots$$

заключаемъ, что:

$$\alpha'+\alpha''=\alpha$$

$$\beta'+\beta''=\beta$$

$$\gamma'+\gamma''=\gamma$$

и т. д.

Поэтому, представивъ равенство (2) въ видѣ:

$$M_x=\sum A x^{\alpha}(x^g)^{\beta}(x^{g^2})^{\gamma}\ldots\ldots=\sum B x^{\alpha'}(x^g)^{\beta'}(x^{g^2})^{\gamma'}\ldots\ldots\sum C x^{\alpha''}(x^g)^{\beta''}(x^{g^2})^{\gamma''};\ldots$$

*) Потому что $\alpha'+\alpha''=\alpha$.

и замѣнивъ въ немъ x^g, x^{g^2}.... соотвѣтственно черезъ y, z...., получимъ тождество:

$$M_{x,y,z}\ldots=\sum Ax^\alpha y^\beta z^\gamma\ldots=\sum Bx^{\alpha'}y^{\beta'}z^{\gamma'}\ldots\sum Cx^{\alpha''}y^{\beta''}z^{\gamma''}\ldots\ldots$$

Итакъ, способъ Кронекера для разложенія на множителей многочлена со многими перемѣнными состоитъ въ слѣдующемъ:

Всѣмъ перемѣннымъ, входящимъ въ многочленъ, кромѣ одного, даютъ вышеуказанныя частныя значенія и, такимъ образомъ, получаютъ многочленъ съ одной буквой x. Полученный многочленъ разлагаютъ на множителей по извѣстнымъ правиламъ. Показатель каждаго члена разложенія представляютъ по системѣ нумераціи g. Если окажется, что сумма единицъ одинаковыхъ разрядовъ въ какихъ нибудь двухъ показателяхъ множимаго и множителя *) равна или болѣе g, то это разложеніе должно быть отброшено. Въ противномъ случаѣ, замѣнимъ снова x^g, x^{g^2}...... соотвѣтственно черезъ y, z...., и получимъ искомое разложеніе.

Примѣръ. Разложить на множителей:

$$M_{x,y,z}=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Полагаю:

$$y=x^4$$
$$z=x^{4^2}=x^{16}.$$

Тогда:

$$M_x=x^3+x^{12}-3x^{21}+x^{48}=(x+x^4+x^{16})(x^2-x^5+x^8-x^{17}-x^{20}+x^{32}).$$

Выразимъ показателей этого разложенія по системѣ нумераціи 4; тогда получимъ:

$$(x^1+x^{10}+x^{100})(x^2-x^{11}+x^{20}-x^{101}-x^{110}+x^{200}).$$

Такъ какъ сумма единицъ одинаковыхъ разрядовъ въ любой парѣ показателей, взятыхъ по оному изъ множимаго и множителя, меньше 4, то это разложеніе удовлетворяетъ требованію.

Дѣлая обратную замѣну, получимъ:

$$M_{x,y,z}=(x+y+z)(x^2-xy+y^2-xz-yz+z^2)$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

Признакъ неприводимости.

Изложенное исчерпываетъ вопросъ о разложеніи на раціональныхъ множителей цѣлаго многочлена съ какимъ угодно числомъ перемѣнныхъ.

*) Одинъ изъ показателей принадлежитъ члену множимаго, а другой—члену множителя.

Если послѣдовательное отысканіе множителей 1-ой, 2-ой, 3-ей.... степеней (см. стр. 121) покажетъ, что такихъ множителей нѣтъ, то, слѣдовательно, данный многочленъ на раціональныхъ множителей вовсе не разлагается. Такой многочленъ называется *неприводимымъ*. Къ числу неприводимыхъ многочленовъ принадлежатъ x^2+1, x^2-2 и пр.

Указанный процессъ для раскрытія непроводимости многочлена, по своей сложности, имѣетъ мало практическаго значенія.

Съ практической, да и съ теоретической точки зрѣнія желательно было бы дать прямые признаки, по которымъ можно судить о неприводимости многочлена.

Къ сожалѣнію, такихъ общихъ признаковъ не существуетъ, а есть только нѣсколько частныхъ теоремъ, одну изъ которыхъ мы приводимъ ниже, потому что она интересна сама по себѣ и, кромѣ того, влечетъ за собою слѣдствіе довольно важное для элементарной алгебры.

Теорема.

Если въ многочленъ:

$$M_x = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + A_n$$

коэффиціенты A_1, A_2.........A_{n-1} суть кратныя нѣкотораго первоначальнаго числа p (отличнаго отъ 1) и $A_n = \pm p$, то M_x — есть неприводимый многочленъ.

Допустимъ противное и пусть:

$$M_x = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + A_n = (x^k + B_1 x^{k-1} + \ldots\ldots + B_k)(x^l + C_1 x^{l-1} + \ldots + C_l).$$

Такъ какъ:

$$B_k C_l = A_n = \pm p,$$

гдѣ p первоначальное число, то одно изъ количествъ B_k и C_l равно $\pm p$, а другое — ± 1.

Положимъ, что:

$$B_k = \pm 1$$

$$C_l = \pm p.$$

Такъ какъ M_x можно, по условію, представить подъ видомъ:

$$M_x = x^n + pM'_x,$$

гдѣ M'_x цѣлый многочленъ, то:

$$(x^k + B_1 x^{k-1} + \ldots\ldots \pm 1)(x^l + C_1 x^{l-1} + \ldots\ldots + C_{l-2} x^2 + C_{l-1} x \pm p) = x^n + pM'_x.$$

Здѣсь:

$$x^k . x^l = x^n,$$

поэтому:

$$(B_1x^{k-1}+\ldots\ldots\pm1)(C_1x^{l-1}+\ldots\ldots+C_{l-2}x^2+C_{l-1}x\pm p)=pM'_x.$$

Произведеніе множимаго на членъ $\pm p$ множителя доставитъ многочленъ вида pM''_x, перенеся его во вторую часть и соединяя съ находящимся тамъ многочленомъ, получимъ равенство:

$$(B_1x^{k-1}+\ldots\pm1)(C_1x^{l-1}+\ldots\ldots+C_{l-2}x^2+C_{l-1}x)=pM''''_x.$$

Младшій членъ произведенія, находящагося въ первой части, равенъ $\pm C_{l-1}x$ и, на основаніи послѣдняго равенства, слѣдуетъ заключить, что онъ дѣлится на p,—слѣдовательно C_{l-1} дѣлится на p.

Поэтому произведеніе множимаго на $C_{l-1}x$ дастъ многочленъ съ коэффиціентами кратными p; перенеся его во вторую часть и соединивъ съ находящимся тамъ многочленомъ, получимъ:

$$(B_1x^{k-1}+B_2x^{k-2}+\ldots\ldots\pm1)(C_1x^{l-1}+\ldots\ldots+C_{l-2}x^2)=pM'''_x.$$

Продолжая подобныя сужденія далѣе, убѣдимся, что всѣ коэффиціенты C_{l-2},, C_{l-3},.....C_1 дѣлятся на p и окончательно получимъ:

$$B_1x^{k-1}+B_2x^{k-2}+\ldots\ldots\ldots\pm1=pN_x.$$

Равенство это невозможно, такъ какъ ±1 не дѣлится на p.

Слѣдовательно, M_x неприводимъ.

Слѣдствіе. Если p первоначальное число, то многочленъ:

$$M_x=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots\ldots+1$$

неприводимъ.

Замѣтимъ, что:

$$M_x=\frac{x^p-1}{x-1}$$

и положимъ:

$$x=y+1.$$

Тогда:

$$M_{y+1}=\frac{(y+1)^p-1}{y}=y^{p-1}+py^{p-2}+\frac{p(p-1)}{1.2}y^{p-3}+\ldots\ldots+p.$$

Такъ какъ всѣ коэффиціенты (кромѣ 1-го) послѣдняго выраженія, какъ извѣстно, дѣлятся на p, то на основаніи предыдущей теоремы M_{y+1} неприводимъ. Отсюда заключаемъ, что M_x есть также неприводимый многочленъ.

Подобнымъ же образомъ легко доказать слѣдующую болѣе общую теорему:

„Если p первоначальное число, то многочленъ, происходящій отъ дѣленія $x^{p^\mu}-1$ на $x^{p^{\mu-1}}-1$, неприводимъ".

О неприводимыхъ многочленахъ.

Неприводимые многочлены обладаютъ свойствами аналогичными со свойствами первоначальныхъ чиселъ.

Приводимъ нѣкоторыя изъ нихъ.

1. Если произведеніе M_xN_x дѣлится на неприводимый многочленъ K_x и притомъ M_x на K_x не дѣлится, то необходимо N_x дѣлится на K_x.

2. Если M_x дѣлится на неприводимый многочленъ K_x и на неприводимый многочленъ L_x, отличный отъ перваго, то M_x дѣлится на K_xL_x.

3. Всякій многочленъ только однимъ способомъ можетъ быть разложенъ на произведеніе неприводимыхъ множителей.

Доказательство этихъ теоремъ можно найти въ нѣкоторыхъ элементарныхъ учебникахъ алгебры. (См. напримѣръ. алебру Гутора).

М. Попруженко (Оренбургъ).

ОПЫТЪ ЭЛЕМЕНТАРНАГО ИЗЛОЖЕНІЯ

начала сохраненія энергіи.

§ 1. *Работою силы* называется перемѣщеніе тѣла подъ дѣйствіемъ силы. За *единицу работы* принимаютъ килограмметръ, т. е. работу при паденіи 1 килограмма отъ собственнаго вѣса на 1 метръ. Всякую другую *работу условились измѣрять произведеніемъ изъ числовой величины постоянной силы на длину прямолинейнаго пути, пройденнаго тѣломъ по направленію силы.*

Если сила не постоянна и путь не прямолинеенъ, то мы разобьемъ путь на столь малые элементы, что въ теченіе каждаго изъ нихъ силу можно считать постоянною, а путь прямолинейнымъ; вычислимъ работу для каждаго изъ элементовъ пути, и сумму вычисленныхъ такимъ образомъ работъ для всего пути, будемъ называть работою силы на этомъ пути.

Пусть двужущееся тѣло есть матеріальная точка, и сила не совпадаетъ съ направленіемъ пути; тогда изъ нашего опредѣленія мѣры работы слѣдуетъ, что для вычисленія ея необходимо проекцію пройденнаго пути на направленіе силы помножить на величину силы. Самыми простыми геометрическими соображеніями тотчасъ же убѣдимся, что мы получимъ то-же число, если проекцію силы на направленіе пути помножимъ на длину пути.

§ 3. *Уравненіе работъ для матеріальной точки подъ дѣйствіемъ одной силы.* Извѣстно, что движеніе точки по *данному* пути подъ дѣйствіемъ постоянной силы вполнѣ опредѣляется слѣдующими тремя уравненіями:

$$F=Mj \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$V=V_0+jt \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

$$s=V_0t+j\frac{t^2}{2}=\left(\frac{V+V_0}{2}\right)t \quad \ldots \ldots (3)$$

Здѣсь F есть величина силы, M—масса движущагося тѣла, t—время движенія, V_o—скорость въ началѣ движенія, V—скорость, спустя время t отъ начала движенія, s—длина пройденнаго во время t пути. Если F совпадаетъ съ направленіемъ движенія, то работа силы будетъ измѣряться произведеніемъ $F.s$. Имѣемъ изъ (1) и (3)

$$Fs = Mj.\left(\frac{V+V_o}{2}\right).t,$$

Но изъ (2)

$$j = \frac{V-V_o}{2},$$

а потому

$$Fs = M\frac{V-V_o}{t}.\frac{V+V_o}{2}.t = \frac{MV^2}{2} - \frac{MV_o^2}{2} \quad . \; . \; . \; . \; (I)$$

Произведеніе $\frac{MV^2}{2}$ называется *кинетическою энергіею*, и потому уравненіе (I) прочтется такъ: *Работа постоянной силы равна приращенію кинетической энергіи.*

Если сила не совпадаетъ съ *даннымъ* направленіемъ пути, то мы повторимъ всѣ тѣ-же вычисленія, взявши не самую силу, а ея проекцію на направленіе пути и получимъ ту-же теорему.

§ 3. *Движеніе точки по данному пути отъ дѣйствія нѣсколькихъ силъ.* Пусть тѣло движется по данному пути при дѣйствіи нѣсколькихъ силъ F_1, F_2, F_3 и т. д. Если проекція какой либо силы F на путь имѣетъ направленіе обратное направленію движенія, то условимся считать такую работу отрицательною. *Алгебраическую сумму работъ всѣхъ силъ F_1, F_2, F_3 и т. д. условимся называть работою всѣхъ силъ на данное тѣло.* Такъ какъ дѣйствіе силы не зависитъ отъ дѣйствія другихъ силъ, то мы приведемъ тѣло въ то-же окончательное состояніе, заставимъ ли мы дѣйствовать на него силы вмѣстѣ или поочередно. Такъ какъ кромѣ того изъ (I) видно, что работа каждой силы всегда равна приращенію кинетической энергіи, какова бы ни была начальная скорость, то мы можемъ найти окончательную кинетическую энергію слѣдующимъ образомъ: заставимъ работать на наше тѣло одну изъ силъ; пусть работа этой силы есть T_1, начальная скорость тѣла V_o, а окончательная V'. Тогда

$$T_1 = \frac{MV'^2}{2} - \frac{MV_o^2}{2}.$$

Затѣмъ заставимъ работать вторую силу на тѣло, имѣющее начальную скорость V'. Пусть работа второй силы на данномъ пути есть T_2, а окончательная скорость есть V''. Тогда

$$T_2 = \frac{MV''^2}{2} - \frac{MV'^2}{2} \text{ и т. д.}$$

Пусть работа послѣдней силы есть T_n; скорость, доставленная тѣлу предпослѣднею силою есть V''', а скорость въ концѣ дѣйствія послѣдней силы есть V (ту-же скорость доставили бы всѣ силы, дѣйствуя на тѣло одновременно). Имѣемъ

$$T_n = \frac{MV^2}{2} - \frac{MV'''^2}{2}.$$

Складывая почленно всѣ эти уравненія, мы получимъ

$$T_1 + T_2 + \ldots\ldots + T_n = \frac{MV^2}{2} - \frac{MV'''^2}{2} + \frac{MV'''^2}{2} - \ldots\ldots + $$
$$+ \frac{MV''^2}{2} - \frac{MV'^2}{2} + \frac{MV'^2}{2} - \frac{MV_0^2}{2}.$$

Обозначая работу всѣхъ силъ на тѣло черезъ T, получимъ

$$T = \frac{MV^2}{2} - \frac{MV_0^2}{2},$$ т. е.

при дѣйствіи многихъ силъ на точку работа ихъ равна приращенію кинетической энергіи.

§ 4. *Работа силъ, дѣйствующихъ на систему точекъ.* Всякое тѣло можно разсматривать состоящимъ изъ системы свободныхъ матеріальныхъ точекъ, подверженныхъ дѣйствію различныхъ силъ. Вычислимъ работу силъ, дѣйствующихъ на каждую изъ точекъ, и алгебраическую сумму этихъ работъ для всѣхъ точекъ назовемъ работою силъ, дѣйствующихъ на систему. Сумму кинетическихъ энергій всѣхъ точекъ системы назовемъ кинетическою энергіею системы. Написавъ для каждой изъ точекъ системы уравненіе работъ и сложивъ почленно всѣ эти уравненія, мы получимъ, что работа T всѣхъ силъ системы равна приращенію кинетической энергіи $W_2 - W_1$, если W_2 есть кинетическая энергія системы для 2-го положенія, а W_1 есть кинетическая энергіи для начальнаго положенія. Т. е.

$$T = W_2 - W_1.$$

§ 5. *Начало возможныхъ скоростей.* Если всѣ точки системы движутся такъ, что кинетическая энергія системы не мѣняется, то изъ предыдущаго уравненія слѣдуетъ, что сумма работъ для всей системы равна 0; т. е. если $W_2 = W_1$, то $T = 0$. Называя тѣ силы, для которыхъ работа положительна, *движущими*, а прочія силы *сопротивляющимися*, мы имѣемъ слѣдующее *начало возможныхъ скоростей: При установившемся движеніи системы работа движущихъ силъ равна работѣ силъ сопротивляющихся.*

§ 6. *Силы внутреннія и внѣшнія.* Тѣ силы, которыя происходятъ отъ взаимодѣйствія частицъ системы, называются *внутренними*; прочія силы суть *внѣшнія*. Ньютонъ принялъ, что всѣ внутреннія силы попарно равны, прямо противоположны, дѣйствуютъ по прямой, соединяющей взаимодѣйствующія точки, и зависятъ только отъ разстоянія между

этими точками. Изъ этихъ свойствъ внутреннихъ силъ слѣдуетъ, что, если система пришла какимъ либо путемъ изъ одного положенія въ другое и затѣмъ обратно *тѣмъ же путемъ* вернулась въ первое положеніе, то *работа всѣхъ силъ при обратномъ перемѣщеніи отличается только знакомъ отъ работы при прямомъ перемѣщеніи*, ибо при обратномъ движеніи длины путей и величины силъ, произведеніе которыхъ измѣряетъ работу, остается безъ измѣненія.

§ 7. *Положеніе о невозможности вѣчнаго движителя.* Если система точекъ предоставлена только внутреннимъ силамъ, то наблюденіе показываетъ, что она можетъ двигаться вѣчно по очень сложнымъ законамъ; примѣръ: солнечная система. Но при существованіи какихъ либо внѣшнихъ сопротивленій, т. е. силъ, производящихъ отрицательную работу, движеніе системы со временемъ прекратится; такъ учитъ насъ опытъ и наблюденіе. Это положеніе о невозможности вѣчнаго движенія системы при существованіи внѣшнихъ сопротивленій заключаетъ въ себѣ, какъ частный случай, законъ инерціи.

§ 8. *Независимость работы внутреннихъ силъ отъ промежуточныхъ состояній. При переходѣ системы изъ одного положенія въ другое, внутреннія силы системы производятъ одну и ту-же работу, какимъ бы путемъ переходъ не совершался.* Допустимъ противное; пусть при переходѣ изъ положенія I въ положеніе II путемъ A требуется большая работа Q, чѣмъ при переходѣ изъ I во II путемъ B, когда производится работа q. Предоставимъ внутреннимъ силамъ переводить систему изъ I положенія во II путемъ A. При этомъ система пріобрѣтетъ нѣкоторую кинетическую энергію, равную работѣ внутреннихъ силъ Q. Остановимъ каждую изъ точекъ системы помощью, напримѣръ, пружинъ; пружины при этомъ сожмутся и работа силы упругости пружины будетъ равна исчезнувшей кинетической энергіи, т. е. Q. Заставимъ теперь эти пружины разжиматься и двигать всѣ точки системы изъ II положенія въ I, по пути B; при этомъ пружины должны произвести только работу—q. Слѣдовательно, можно было бы помѣстить на пути B нѣкоторое сопротивленіе, т. е. ввести силу, дѣйствующую противъ движенія, и система все таки вернулась бы въ положеніе I. Такимъ образомъ мы могли бы осуществить вѣчный движитель, что признано на основаніи многовѣкового опыта невозможнымъ. Итакъ работа внутреннихъ силъ не зависитъ отъ промежуточныхъ состояній системы, а только отъ крайнихъ, т. е. отъ начальнаго и конечнаго положенія системы.

§ 9. *Потенціальная энергія.* Среди всевозможныхъ положеній системы, предоставленной внутреннимъ силамъ, есть по крайней мѣрѣ одно такое N, для достиженія котораго внутреннія силы системы должны произвести наибольшую работу. Пусть работа, необходимая для достиженія системою этого положенія, выходя изъ положенія I, есть U_1; назовемъ эту работу *потенціальною энергіею* въ положеніи I. Для достиженія системою положенія N изъ II пусть понадобится работа U_2; это будетъ потенціальная энергія системы въ положеніи II. Такъ какъ работа внутреннихъ силъ при переходѣ изъ положенія I въ положеніе II не зависитъ отъ пути, то мы направимъ систему сначала въ положеніе N, при чемъ произведется работа U_1, а затѣмъ перемѣстимъ систему въ положеніе II, при чемъ произведется работа—U_2; вся работа будетъ U_1—U_2.

Итакъ *работа внутреннихъ силъ системы при переходѣ изъ одного положенія I въ положеніе II равно разности потенціальныхъ энергій этихъ двухъ положеній системы.*

§ 10. *Сохраненіе энергіи.* Мы ранѣе выдѣли, что

$$T = W_2 - W_1.$$

Подъ T мы понимаемъ здѣсь работу внѣшнихъ силъ R и работу внутреннихъ силъ системы, равную, какъ только что видѣли, $U_1 - U_2$, а потому

$$R + U_1 - U_2 = W_2 - W_1$$

или

$$R = (W_2 + U_2) - (W_1 + U_1).$$

Сумму $W + U$ кинетической и потенціальной энергій системы въ какомъ либо положеніи назовемъ *полною энергіею системы* въ этомъ положеніи. А потому послѣднее уравненіе прочтется такъ:

Приращеніе полной энергіи системы равно работѣ внѣшнихъ силъ, дѣйвтвовавшихъ на систему.

Если внѣшнихъ силъ не имѣется, то $R = 0$, и имѣемъ

$$W_1 + U_1 = W_2 + U_2$$

т. е. *полная энергія системы, предоставленной только внутреннимъ силамъ, не измѣняется.*

§ 11. *Законъ покоя. Если въ какомъ либо положеніи потенціальная энергія системы наименьшая, то это положеніе соотвѣтствуетъ устойчивому равновѣсію.* Въ самомъ дѣлѣ, при всякомъ перемѣщеніи системы энергія ея должна увеличиться (иначе положеніе не соотвѣтствовало бы наименьшей энергіи), а для этого необходима работа внѣшнихъ силъ; слѣдовательно безъ нихъ тѣло останется въ покоѣ. Равновѣсіе будетъ устойчивое, потому что при всякомъ перемѣщеніи изъ положенія равновѣсія работа внутреннихъ силъ, равная разности начальной и конечной потенціальной энергій, будетъ отрицательная; слѣдовательно внутреннія силы противодѣйствуютъ всякому перемѣщенію и по устраненію внѣшнихъ силъ вернуть систему въ прежнее положеніе.

Если въ какомъ либо положеніи потенціальная энергія системы имѣетъ наибольшую величину, то система будетъ въ неустойчивомъ равновѣсіи. Если потенціальная энергія имѣетъ наибольшую возможную величину, то, взявъ два произвольныя, но прямопротивоположныя перемѣщенія, мы увидимъ, что работа внутреннихъ силъ для обоихъ будетъ величина положительная, т. е. внутреннія силы стремятся передвинуть систему отъ даннаго положенія, какъ въ одну, такъ и въ другую сторону, и потому въ данномъ положеніи (наибольшей потенціальной энергіи) они должны оставить ее въ покоѣ. Отсюда же видна и неустойчивость соотвѣтственнаго равновѣсія.

Если при всѣхъ возможныхъ положеніяхъ потенціальная энергія системы остается неизмѣнною, то это значитъ, что внутреннія силы не препят-

ствуютъ, но и не помогаютъ этимъ перемѣщеніямъ, ибо работа ихъ, равная измѣненію потенціальной энергіи, равна 0.

Далѣе я разсмотрю примѣненіе закона сохраненія энергіи къ движенію и равновѣсію твердыхъ и жидкихъ тѣлъ.

А. Л. Корольковъ.

ЗАДАЧИ.

№ 191. Найти въ цѣлыхъ числахъ длины сторонъ прямоугольника, периметръ и площадь котораго выражаются однимъ числомъ.

А. Воиновъ (Харьковъ).

№ 192. На катетахъ прямоугольнаго треугольника ABC, въ которомъ $\angle$B есть прямой, построены внѣшніе квадраты AM и CN; изъ ихъ вершинъ M и N (ближайшихъ къ B) опущены перпендикуляры MP и NQ на гипотенузу AC и ея продолженіе. По даннымъ $MP=a$ и $NQ=b$ построить треугольникъ ABC.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 193. Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ Прям. Тригон. Верещагина, Спб. 1883, стр. 175, № 991):

„Высота башни равна 120 ф., основаніе колонны находится въ одной горизонтальной плоскости съ основаніемъ башни. Наблюдатель, помѣстившійся на вершинѣ башни, нашелъ, что углы, составленные лучами зрѣнія къ обоимъ концамъ колонны съ горизонтальной плоскостью (угловыя пониженія), были соотвѣтственно равны 60° и 30°. Найти высоту колонны". *Г. Ширинкинъ* (Воронежъ) и *А. П.* (Пенза).

№ 194. Рѣшить уравненіе

$$\frac{9\mathrm{Sin}x-24\mathrm{Sin}^3x+16\mathrm{Sin}^5x}{3\mathrm{Cos}x-16\mathrm{Cos}^3x+16\mathrm{Cos}^5x}=1.$$

И. Вонсикъ (Воронежъ).

№ 195. Доказать, что прямая OL, проведенная изъ точки пересѣченія O діагоналей AC и BD гармоническаго четыреугольника ABCD параллельно одной изъ его сторонъ, напр. BC, до пересѣченія съ другой стороной, напр. CD, въ точкѣ L,—есть средняя пропорціональная между отрѣзками этой стороны CL и LD. *И. Бискъ* (Кіевъ).

№ 196. Показать, что если V_a, V_b, V_c обозначаютъ объемы тѣлъ, образуемыхъ вращеніемъ треугольника ABC соотвѣтственно около сторонъ BC, CA, AB, то

$$\frac{1}{V_a^2}=\frac{1}{V_b^2}+\frac{1}{V_c^2}-\frac{2\mathrm{Cos}A}{V_bV_c}.$$

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 243. Вывести общую формулу для вычисленія силы поднятія аэростата по слѣдующимъ даннымъ:

V—объемъ (въ куб. метрахъ), D—плотность газа (отн. воздуха), t—температура, H—атмосферное давленіе, P—вѣсъ единицы объема (куб. метра) воздуха при нормальномъ давленіи (0,76 м.) и при 0°С., (приблизительно P=1,293 килогр.) α—коэффиціентъ расширенія воздуха (прибл. α=0,00366) и Q—вѣсъ оболочки аэростата и всего груза, подлежащаго поднятію.

Если P вѣсъ одного куб. метра воздуха при нормальномъ давленіи 0,76 м. и при 0°С., то при t°С. и при томъ же самомъ нормальномъ давленіи вѣсъ одного куб. метра воздуха равенъ

$$\frac{P}{1+\alpha t},$$

такъ какъ въ то же время (т. е. при t°С) объемъ газа при той же массѣ увеличится въ $(1+\alpha t)$ разъ; вѣсъ же воздуха при давленіи въ H метровъ и при t°С. равенъ

$$\frac{PH}{0,76(1+\alpha t)}.$$

Поэтому вѣсъ воздуха, вытѣсняемаго аэростатомъ, есть

$$\frac{PHV}{0,76(1+\alpha t)},$$

а вѣсъ газа въ аэростатѣ будетъ

$$\frac{PHVD}{0,76(1+\alpha t)},$$

вѣсъ же газа, оболочки аэростата и груза такой:

$$Q+\frac{P.H.V.D}{0,76(1+\alpha t)}.$$

Слѣдовательно сила поднятія аэростата равна

$$\frac{P.H.V(1-D)}{0,76(1+\alpha t)}-Q,$$

или

$$\left[\frac{1,293H.V(1-D)}{0,76(1+0,00366t)}-Q\right] \text{килогр.}$$

С. Блажко (Москва).

№ 356. Какая цыфра занимаетъ n-ое мѣсто въ ряду, составленномъ изъ натуральныхъ чиселъ,

$$123456789101112.........99100101102.........?$$

Однозначныхъ чиселъ 9, двузначныхъ 99—9=90 и вообще m—значныхъ

$$(10^m-1)-(10^{m-1}-1)=9.10^{m-1}.$$

Поэтому, чтобы узнать число мѣстъ, занятыхъ числами отъ 1 до m—значныхъ включительно, надо написать m разъ подрядъ цыфру 9 и умножить послѣднюю девятку на 1, вторую съ конца на 2, тертью на 3 и т. д. При этомъ всегда при умноженіи 9-ти на k получится 8 и k—1 въ умѣ. Въ самомъ дѣлѣ

$$9(k+1)=(10-1)(k+1)=10k+10-k-1,$$

и слѣдовательно если у насъ еще въ умѣ k—1, то получится $10k+8$, т. е. законъ вѣренъ и для слѣдующаго числа $k+1$, но онъ оправдывается для $k=2$, слѣдовательно вообще онъ вѣренъ. Поэтому искомое число мѣстъ равно числу

$$(m-1)88.........89,...... \qquad (1)$$

гдѣ число восмерекъ равно $(m-1)$. Если данное число n равняется одному изъ чиселъ формы (1) напр. 1288888888889, то искомая цыфра будетъ 9, потому что послѣднее изъ m-значныхъ чиселъ оканчивается 9-ю. Если же n не равняется ни одному числу формы (1), то надо взять ближайшіе меньшее и вычесть изъ n; разность покажетъ, сколько занято мѣстъ $(m+1)$—значными числами до искомой цыфры включительно. Эту разность раздѣлимъ на $(m+1)$. Если дѣленіе совершится безъ остатка, то искомая цыфра на единицу меньше послѣдней цыфры частнаго; если же при дѣленіи получится остатокъ r, то къ частному надо придать 10^m и взять въ полученномъ числѣ r-ую цыфру слѣва. Указанное правило вытекаетъ изъ того, что $(q+1)$-ое число изъ $(m+1)$—значныхъ есть 10^m+q.

Примѣръ: отыскать цыфру, стоящую на 75830-мъ мѣстѣ.

$$75830-38889=36941;$$

$$\begin{array}{r|l} 36941 & 5 \\ \hline 1 & 7388 \end{array}$$

т. е. искомая цыфра занимаетъ первое мѣсто въ числѣ 17388, т. е.=1, цыфра же, занимающая предыдущее мѣсто, есть 8—1=7.

В. Соллертинскій (Гатчино).

№ 471. На сторонахъ a, b, c треугольника ABC взяты соотвѣтственно точки E, F, D такъ, что отрѣзки AD, BE и CF удовлетворяютъ условію:

$$abc - ab.AD - bc.BE - ca.CF + a.AD.CF + b.BE.AD + c.CF.BE -$$
$$- 2AD.BE.CF = 0.$$

Доказать, что прямая AE, BF и CD пересѣкаются въ одной точкѣ. Данное равенство можно представить въ такомъ видѣ:

$$b(c - AD)(a - BE) - c.CF(a - BE) + a.AD.CF - 2AD.BE.CF = 0,$$

или

$$b.BD.CE - c.CF.CE + a.AD.CF - 2AD.BE.CF = 0,$$

Замѣняя стороны a, b, c суммою соотвѣтственныхъ отрѣзковъ, по сокращеніи получимъ

$$AF.BD.CE = AD.BE.CF, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

но если мы черезъ пересѣченіе прямыхъ AD и BE проведемъ прямую CD′ (D′—точка перссѣченія этой прямой съ стороною AB), то, какъ извѣстно, должно существовать такое равенство

$$AF.BD'.CE = AD'.BE.CF;$$

сравнивая это послѣднее равенство съ (α), заключаемъ, что точка D, т. е. прямая CD проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ AE и BF, что и требовалось доказать.

П. Трипольскій (Полтава), *Я. Эйлеръ* (Спб.). Ученики: Курск. г. (7) *В. Х.*, Кам.-Под. г. (7) *Я. М.*

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 9 Мая 1891 г.

Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.